FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Departman za proizvodno mašinstvo

Tehnoekonomska optimizacija i preduzetništvo

***Tema:***

# EKSPERIMENTALNE METODE OPTIMIZACIJE

Dr Dejan Lukić

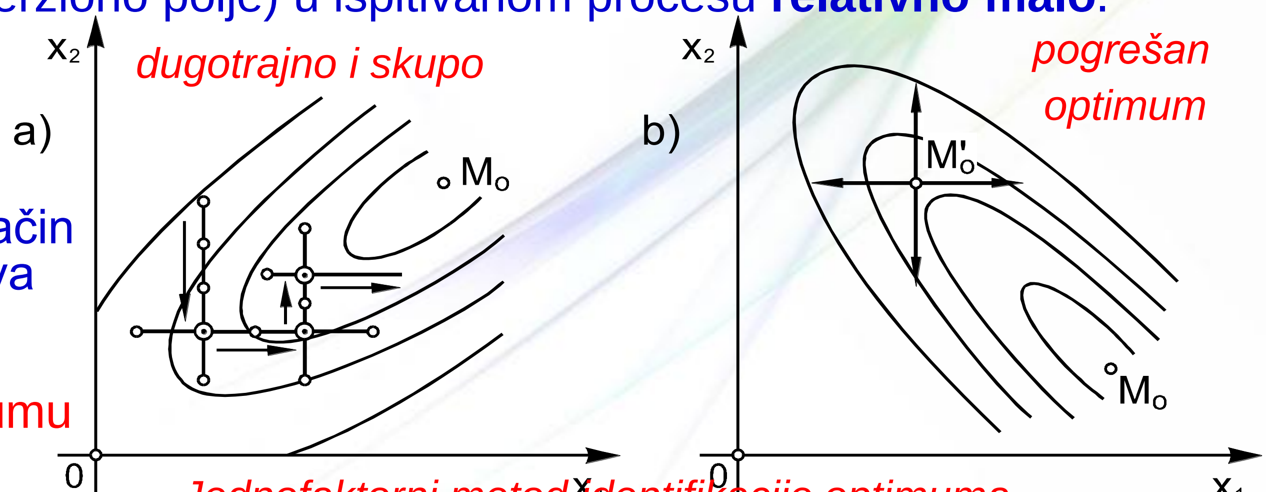
# Boks-Vilsonova gradijentna metoda

Primenom opšte teorije **Boks-Vilsonove metode** mogu se uspešno rešiti **tri zadatka** tehnoekonomske optimizacije procesa. To su:

1. ***Statistička identifikacija nepoznatih parametara*** *ili efekata* ***u*** *pretpostavljenom linearnom ili nelinearnom* ***matematičkom modelu procesa****, sa ocenom* ***adekvatnosti modela****, uz najmanje moguće troškove i vreme ispitivanja, ali i uz visok stepen pouzdanosti rezultata,*
2. ***Analiza signifikantnosti pojedinih kontrolisanih faktora procesa****, odnosno pouzdana selekcija na grupe signifikantnih i nesignifikantnih faktora, što je značajno u metodologiji i tehnici optimizacije procesa i*
3. ***Utvrđivanje najpovoljnijih radnih uslova procesa preko identifikacije gradijentnih linija*** *ili optimalnih režimsko-tehnoloških trasa upravljanja procesom pri nepoznatom obliku f-je optimizacije (eksperimentalno-statistička optimizacija i upravljanje procesom na osnovu empirijske povratne sprege).*

Kada se primeni na treći zadatak, metoda je poznata pod nazivom **Boks-Vilsonova gradijantna metoda**, i koristi se prvenstveno u onim slučajevima kada je **polje šuma** (disperziono polje) u ispitivanom procesu **relativno malo**.

Suština metode je u razvijenom **algoritmu sukcesivnih koraka** pomoću kojih se na brz način i sa relativno malo troškova vrši **kretanje po gradijentnoj liniji** ka optimalnoj oblasti i optimumu obradnog procesa.



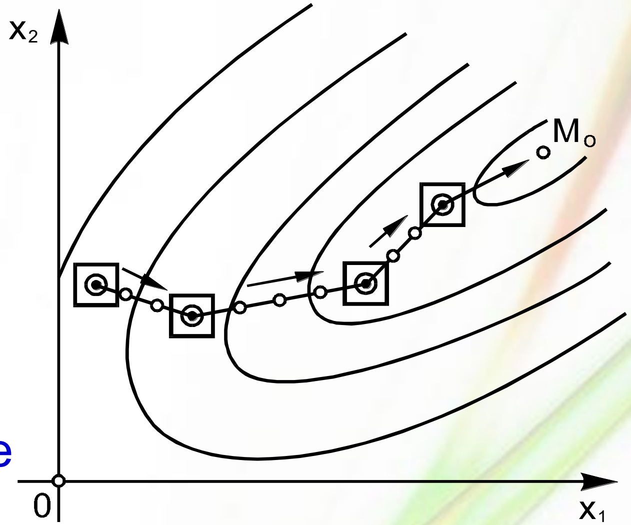

*Jednofaktorni metod identifikacije optimuma*

# Boks-Vilsonova gradijentna metoda

Operativni postupak po Boks-Vilsonovoj gradijentnoj metodi, tj. kretanje po gradijentnoj liniji do optimuma ($M_o$) procesa, sastoji se iz **određenog broja sukcesivnih ciklusa**.

Pojedini ciklusi imaju sledeću zajedničku strukturu: $\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i$

Na taj način se opisuje jedan manji deo površine reagovanja **polinomnom funkcijom prvog stepena** na osnovu **eksperimentalno realizovane plan-matrice prvog reda**. Cilj ovog opisivanja nije predikcija procesa, odnosno karakteristike procesa y ili nivoa kriterijuma optimalnosti $F_c$, već definisanje **pravca i smera gradijenta na gradijentnoj liniji**.




**Broj ponavljanja** eksperimenata zavisi od veličine polja šuma, poznate i kao **veličine ukupne greške eksperimenata**. Ako je ova greška mala, tj. ako su rezultati dovoljno stabilni i pouzdani, ponavljanje se izvodi u jednoj tački, centralnoj ili u tački sa najpovoljnijim rezultatima. U suprotnom, ponavljanje treba izvesti u svim tačkama plana.

•Definisanje gradijenta funkcije (grad y) a potom i jednačina prave ($x_k=\lambda^* b_k$) u odnosu na centralnu tačku ortogonalnog plana, pri čemu vrednost parametra $\lambda$ koja određuje položaj (korak) uzastopnih tačaka na gradijentnoj liniji u okviru jednog ciklusa. Na bazi koraka se u pravcu gradijentne linije određuju koordinate **sledeće tačke plana eksperimenta**.

**Veličina koraka** utiče na broj eksperimenata u ciklusu. Pri manjem koraku biće veći broj eksperimenata, ali pri suviše velikom koraku može se preskočiti optimum.

# Boks-Vilsonova gradijentna metoda

Tačkom sa najboljim rezultatom završava se posmatrani ciklus. Ova tačka se uzima za **centralnu tačku ortogonalnog plana** u narednom ciklusu čija su struktura i postupak ispitivanja identični prethodnom ciklusu.

Ciklusi se nastavljaju sve do onog trenutka kada **svi koeficijenti regresije $b_i$ linearnog modela postanu nesignifikantni** tj. kada se uđe u optimalno područje obradnog procesa, za koje je linearni model najčešće neadekvatan pa se dalje preciznije utvrđivanje položaja optimuma u ovoj oblasti izvodi preko planova i modela **drugog ili višeg reda**.

Može se dogoditi da na gradijentnoj trasi jedan ili nekoliko efekata, odnosno koeficijenata modela prime **vrlo male vrednosti** u odnosu na druge efekte. Mogući razlozi za to su:

•***Dotični faktori nisu signifikantni**, pa se posle testiranja mogu isključiti iz dalje analize procesa, što uprošćuje, ubrzava i pojeftinjuje analizu,*

•***Vrednosti faktora nalaze se u blizini svojih optimuma**, pa se gradijentna trasa usmerava u pravcu ostalih faktora i*

•***Uzak interval varijacije faktora**, proizišao iz respektivne šeme kodiranja, pa je nužna korekcija šeme kodiranja, odnosno intervala varijacije.*

Navodi se, kao primer ilustracije izložene procedure metoda, **optimizacija geometrijskih elemenata strugarskog noža sa pločicom od tvrdog metala**, izvedena na osnovu postojanosti kao kriterijuma optimizacije. Primenjen je Boks-Vilsonov gradijentni metod, Režimi obrade: *v=100 m/min, s=0,1 mm/o*, *a=2 mm*, tvrdoća obratka *HB=320-330 kN/cm*$^2$, obrada bez hlađenja. Izdvojen je sistem od pet primarnih geometrijskih elemenata: $x_1=\kappa$, $x_2=\alpha$, $x_3=\gamma$, $x_4=\kappa_1$ i $x_5=r$ (**petofaktorni proces**).

# Plan i rezultati eksperimenta

Najpovoljniji rezultat ostvaren je u eksperimentu **No.3** .

$$(\overline{T} = 54\,\mathrm{min})$$

Time je završen prvi ciklus. Naredni ciklus izvodi se na identičan način, sa **centrom plana u tački** *No.3*.

| R. br. | FAKTORI | PLAN $2^{5-2}$ | | | | | | $\overline{T}$ [min] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\kappa$ | $\alpha$ | $\gamma$ | $\kappa_1$ | r | |
| 1 | OSNOVNI NIVO ($X_{0i}$) | | 45 | 10 | -5 | 15 | 0,5 | |
| 2 | INTERVAL VARIJACIJE ($w_i$) | | 5 | 2 | 2 | 3 | 0,2 | |
| 3 | GORNJI NIVO ($X_{gi}$) | | 50 | 12 | -3 | 18 | 0,7 | |
| 4 | DONJI NIVO ($X_{di}$) | | 40 | 8 | -7 | 12 | 0,3 | |
| 5 | KOD FAKTORA | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4=x_1x_2x_3$ | $x_5=x_1x_3$ | - |
| 6 | TAČKA 1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 | 21 |
| | 2 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 | 12 |
| | 3 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | +1 | 19 |
| | 4 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | 24 |
| | 5 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | -1 | 12 |
| | 6 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | 15 |
| | 7 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | 24 |
| | 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | 33 |
| 7 | $b_i$ | 20 | 1 | 5 | 1 | -1 | 2 | - |
| 8 | $b_i w_i$ | - | 5 | 10 | 2 | -3 | 0,4 | - |
| 9 | $\lambda=\mu/\lvert b_b \rvert$ | 1/5 | | | | | | |
| 10 | KORAK $\lambda b_i w_i$ | | 1 | 2 | 0,4 | -0,6 | 0,08 | - |
| 11 | ZAOKRUŽEN KORAK | | 1 | 2 | 1 | -1 | 0,1 | - |
| | EKSPERIMENTI NA GRADIJENTNOJ LINIJI No.1 | | 46 | 12 | -4 | 14 | 0,6 | 24 |
| | No.3 | | 48 | 16 | -2 | 12 | 0,8 | 54 |
| | No.5 | | 50 | 20 | 0 | 10 | 1,0 | 9 |

# Metode slučajnog pretraživanja

Sve metode **slučajnog ili stohastičkog pretraživanja** temelje se, pri definisanju pravca kretanja ka optimumu i određivanja optimuma nekog objekta optimizacije, na **teoriji slučajnih brojeva**, tj. na slučajnom izboru vrednosti nezavisnih promenljivih $\vec{x} = (x_i) \quad i = \overline{1,k}$

u pojedinim koracima operativne procedure metode.

Bitan pojam ovih metoda je **slučajni vektor**: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k)$

kojim se definiše slučajni pravac u **višefaktornom (*k-tom*) prostoru**. Ovaj vektor može primiti, sa jednakon verovatnoćom, **bilo koji pravac** u *k-tom* prostoru. Njegov intenzitet je, uz to, jednak **jedinici:** $(|\vec{\alpha}| = 1)$

Postoji više metoda slučajnih pretraživanja. Među njima su najvažnije:

- **metoda "slepog" pretraživanja**,
- **metoda slučajnih pravaca**,
- **metoda slučajnih pravaca sa obrnutim korakom**,
- **slučajna metoda Nollau-a i Fürst-a**,
- **slučajna EVOP-metoda** i dr.

# Slučajna EVOP metoda

Jednu vrlo jednostavnu ili efektivnu varijantu metoda slučajnih pretraživanja predstavlja slučajna EVOP-metoda ili REVOP-metoda (**Random EVolutionary OPeration**).

Ovu metodu karakterišu **četiri osnovna obeležja**:

1. ***Primenjuje se u optimizaciji složenih procesa*** *sa vrlo velikim brojem ulaznih, upravljajućih faktora (slučaj višefaktornih procesa),*
2. ***Odluke*** *o prirodi i toku optimizacije* ***se donose direktno na osnovu eksperimentalnih rezultata****,*
3. *Metod je koncipiran za optimizaciju procesa* ***u direktnim proizvodnim uslovima*** *i*
4. ***Struktura i algoritam metoda vrlo su jednostavni****: broj eksperimenata je mali, u odnosu na izrazito veliki broj ulaznih faktora, i malo zavisi od broja faktora, analiza rezultata svedena je na proste numeričke operacije, izbegnut je proračun koeficijenata višestruke regresije.*

Optimizacija procesa pomoću slučajne EVOP-metode deli se na **dve etape**:

**1.Selekciju singnifikantnih ulaznih faktora i 2.Neposrednu optimizaciju procesa**

1.S obzirom da postoji mogućnost da se neki uticajni ($k+1$)-ti faktor propusti i ne obuhvati eksperimentalno-statističkom analizom, pribegava se uključenjem svih relevantnih faktora, što, na drugoj strani, čini sistem respektivnih ulaznih faktora mnogobrojnim.
Rešenje problema postiće se primenom **metoda selekcije faktora**, kojim se izdvajaju signifikantni ulazni faktori iz obimnog skupa indentifikovanih faktora. U okviru metoda selekcije faktora razvijeno je više postupaka.

# Slučajna EVOP metoda

**2. Posle izdvajanja skupa signifikantnih faktora, započinje druga etapa tj. primena EVOP metode.**

Na navedenom primeru pokazana je procedura primene slučajne EVOP-metode na jednom **desetofaktornom procesu**. U praksi se formira radna tablica slučajne EVOP-metode, u koju se unose:

- **eksperimentalni rezultati,**
- **rezultati proračuna i**
- **tok kretanja ka optimumu procesa:**

$$D_1 = \frac{d_1^2}{c}$$

| RE@IMSKE TA^KE (E) | ULAZNI FAKTORI PROCESA | | | | | | | | | | EKSPERIM. REZULTATI (y) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | |
| $E_0$ | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 14,2 |
| $d_1$ | 4 | 9 | 1 | 5 | 7 | 5 | 4 | 8 | 5 | 9 | |
| $D_1 = d_1^2/40$ | +0,4 | -2,0 | +0,0 | -0,6 | -1,2 | +0,6 | -0,4 | -1,6 | -0,6 | -2,0 | |
| $E_1 = E_0 + D_1$ | 5,4 | 3,0 | 5,0 | 4,4 | 3,8 | 5,6 | 4,6 | 3,4 | 4,4 | 3,0 | 22,3 |
| $E_2 = E_1 + D_1$ | 5,8 | 1,0 | 5,0 | 3,8 | 2,6 | 6,2 | 4,2 | 1,8 | 3,8 | 1,0 | 16,0 |
| $d_2$ | 0 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 0 | 4 | 3 | |
| $D_2 = d_2^2/12$ | -0,0 | +2,1 | -2,1 | -1,3 | -2,1 | +2,1 | -2,1 | -0,0 | +1,3 | +0,4 | |
| $E_3 = E_1 + D_2$ | 5,4 | 5,1 | 2,9 | 3,1 | 1,7 | 7,7 | 2,5 | 3,4 | 5,7 | 3,7 | 31,8 |
| $A_4 = E_3 + D_2$ | 5,4 | 7,2 | 0,8 | 1,8 | -0,4 | 9,8 | 0,4 | 3,4 | 7,0 | 4,4 | |
| $E_4$ | 5,4 | 7,2 | 0,8 | 1,8 | 0,4 | 9,8 | 0,4 | 3,4 | 7,0 | 4,4 | 39,6 |
| $A_5 = A_4 + D_2$ | 5,4 | 9,3 | -1,3 | 0,5 | -2,5 | 11,9 | -1,7 | 3,4 | 8,3 | 5,1 | |
| $E_5$ | 5,4 | 9,3 | 1,3 | 0,5 | 2,5 | 11,9 | 1,7 | 3,4 | 8,3 | 5,1 | 31,3 |
| $d_3$ | 1 | 4 | 8 | 7 | 1 | 6 | 0 | 3 | 5 | 0 | |
| $D_3 = d_3^2/30$ | -0,0 | +0,5 | +2,1 | +1,8 | +0,0 | -1,2 | +0,0 | +0,3 | +0,8 | -0,0 | |
| $A_6 = A_4 + D_3$ | 5,4 | 7,7 | 2,9 | 3,6 | -0,4 | 8,6 | 0,4 | 3,7 | 7,8 | 4,4 | |
| $E_6$ | 5,4 | 7,7 | 2,9 | 3,6 | 0,4 | 8,6 | 0,4 | 3,7 | 7,8 | 4,4 | 30,8 |
| $A_7 = A_4 - D_3$ | 5,4 | 6,7 | 1,3 | 0,0 | 0,4 | 11,0 | 0,4 | 3,1 | 6,2 | 4,4 | |
| $E_7$ | 5,4 | 6,7 | 1,3 | 0,0 | 0,4 | 11,0 | 0,4 | 3,1 | 6,2 | 4,4 | 38,0 |
| $d_4$ | 3 | 8 | 9 | 7 | 6 | 7 | 4 | 9 | 5 | 1 | |
| $D_4 = d_4^2/40$ | -0,2 | +1,6 | 2,0 | -1,2 | -0,9 | -1,2 | -0,4 | +2,0 | -0,6 | -0,0 | |
| $A_8 = A_4 + D_4$ | 5,2 | 8,8 | 2,8 | 0,6 | -1,3 | 8,6 | 0,0 | 5,4 | 6,4 | 4,4 | |
| $E_8$ | 5,2 | 8,8 | 2,8 | 0,6 | 1,3 | 8,6 | 0,0 | 5,4 | 6,4 | 4,4 | 23,5 |
| $A_9 = A_4 - D_4$ | 5,6 | 5,6 | -1,2 | 3,0 | 0,5 | 11,0 | 0,8 | 1,4 | 7,6 | 4,4 | |
| $E_9$ | 5,6 | 5,6 | 1,2 | 3,0 | 0,5 | 11,0 | 0,8 | 1,4 | 7,6 | 4,4 | 32,8 |
| $d_5$ | 9 | 7 | 3 | 1 | 2 | 6 | 1 | 7 | 1 | 8 | |
| $D_5 = d_5^2/40$ | -2,0 | -1,2 | -0,2 | -0,0 | -0,1 | -0,9 | +0,0 | +1,2 | +0,0 | +1,6 | |
| $A_{10} = A_4 + D_5$ | 3,4 | 6,0 | 0,6 | 1,8 | -0,5 | 9,1 | 0,4 | 4,6 | 7,0 | 6,0 | |
| $E_{10}$ | 3,4 | 6,0 | 0,6 | 1,8 | 0,5 | 9,1 | 0,4 | 4,6 | 7,0 | 6,0 | 5,51 |
| $A_{11} = A_{10} + D_5$ | 1,4 | 4,8 | 0,4 | 1,8 | 0,4 | 8,2 | 0,4 | 5,8 | 7,0 | 7,6 | |
| $E_{11}$ | 1,4 | 4,8 | 0,4 | 1,8 | 0,4 | 8,2 | 0,4 | 5,8 | 7,0 | 7,6 | 7,16 |
| $A_{12} = A_{11} + D_5$ | -0,6 | 3,6 | 0,2 | 1,8 | 0,3 | 7,3 | 0,4 | 7,0 | 7,0 | 9,2 | |
| $E_{12}$ | 0,6 | 3,6 | 0,2 | 1,8 | 0,3 | 7,3 | 0,4 | 7,0 | 7,0 | 9,2 | 88,15 |
| $A_{13} = A_{12} + D_5$ | -2,6 | 2,4 | 0,0 | 1,8 | 0,2 | 6,4 | 0,4 | 8,2 | 7,0 | 10,8 | |
| $E_{13}$ | 2,6 | 2,4 | 0,0 | 1,8 | 0,2 | 6,4 | 0,4 | 8,2 | 7,0 | 10,8 | 82,3 |
| $d_6$ | 1 | 1 | 7 | 4 | 2 | 6 | 9 | 3 | 8 | 1 | |
| $D_6 = d_6^2/40$ | -0,0 | +0,0 | -1,2 | -0,4 | -0,1 | -0,9 | +2,0 | +0,2 | +1,6 | +0,0 | |
| $A_{14} = A_{12} + D_6$ | -0,6 | 3,6 | -1,0 | 1,4 | 0,2 | 6,4 | 2,4 | 7,2 | 8,6 | 9,2 | |
| $E_{14}$ | 0,6 | 3,6 | 1,0 | 1,4 | 0,2 | 6,4 | 2,4 | 7,2 | 8,6 | 9,2 | 90,42 |
| $A_{15} = A_{14} + D_6$ | -0,6 | 3,6 | -2,2 | 1,0 | 0,1 | 5,5 | 4,4 | 7,4 | 10,2 | 9,2 | |
| $E_{15}$ | 0,6 | 3,6 | 2,2 | 1,0 | 0,1 | 5,5 | 4,4 | 7,4 | 10,2 | 9,2 | 84,5 |
| $d_7$ | 4 | 3 | 3 | 6 | 1 | 2 | 8 | 8 | 5 | 9 | |
| $D_7 = d_7^2/40$ | -0,4 | -0,2 | +0,2 | -0,9 | +0,0 | +0,1 | -1,6 | +1,6 | -0,6 | -2,0 | |
| $A_{16} = A_{14} + D_7$ | -1,0 | 3,4 | -0,8 | 0,5 | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 8,8 | 9,2 | 7,2 | |
| $E_{16}$ | 1,0 | 3,4 | 0,8 | 0,5 | 0,2 | 6,5 | 0,8 | 8,8 | 9,2 | 7,2 | 82,6 |
| $A_{17} = A_{14} + D_7$ | -0,2 | 3,8 | -1,2 | 2,3 | 0,2 | 6,5 | 4,0 | 5,6 | 8,0 | 11,2 | |
| $E_{17}$ | 0,2 | 3,8 | 1,2 | 2,3 | 0,2 | 6,5 | 4,0 | 5,6 | 8,0 | 11,2 | 92,58 |

# Slučajna EVOP metoda

**Polazna tačka** metode bira se tako da se poklapa sa regularnim radnim uslovima I ona se kodira sa 5,0 za sve ulazne faktore.

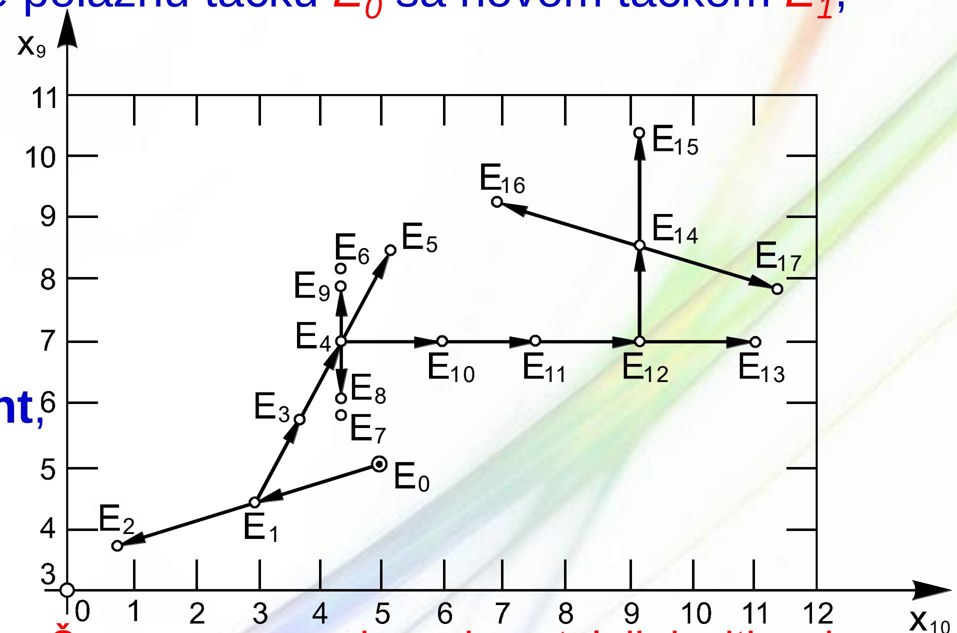
Oko polazne tačke **simetrično se raspoređuje** (u okviru izabranih intervala varijacije) gornji odnosno donji nivo faktora sa kodovima 10,0 i 0,0.

Nakon izvršenog eksperimenta u polaznoj tački ($E_0$), bira se naredna režimska tačka na slučajan način: svakom faktoru pridružuje se na slučaj jedan od brojeva od 0 do 9. Koordinate vektora, koji povezuje polaznu tačku $E_0$ sa novom tačkom $E_1$, određuje se iz formule:

$$D_1 = \frac{d_1^2}{c}$$

Koordinatama D1 se pridružuje, opet na slučajan način, **pozitivan ili negativan znak.**

U tako određenoj drugoj režimskoj tački ($E_1=E_0+D_1$) **izvodi se drugi eksperiment,** pa ako je dobijeni rezultat povoljniji od prethodnog, nastavlja se treći eksperiment u tački $E_2=E_1+D_1$, i tako redom sve dok je naredni rezultat povoljniji od prethodnog.




Šema pravaca eksperimentalnih ispitivanja prema slučajnoj EVOP- metodi

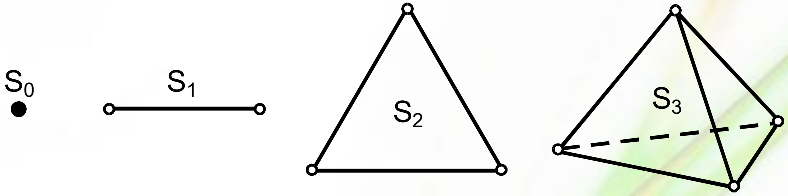
Kada se u nekom koraku pojavi slučaj da je dobijeni eksperimentalni rezultat nepovoljniji od prethodnog, **menja se pravac trase eksperimenta** tako što se utvrđuju nove vrednosti slučajnih veličina *d*, izračunavaju karakteristične vrednosti *D* a zatim i koordinate nove režimske tačke, polazeći od one prethodne tačke u kojoj je postignut najbolji eksperimentalni rezultat.

# Simpleksna metoda

Geometrijski model faktornog plana u simpleksnom metodu **ima oblik pravilnog ili regularnog simpleksa**, tj. režimske tačke višefaktornog procesa obrazuju **pravilan simpleks** u višefaktornom ili hiperprostoru.

Simpleks, dakle, definiše skup *k+1* **nezavisnih tačaka** koje obrazuju mnogogranu figuru u *k-dimenzionom* prostoru. Za *k=3* simpleks predstavlja proizvoljni **tetraeder** koji je nepravilna **trostrana piramida**, ali i pravilna trostrana piramida ako je pravilan simpleks, za *k=2* formira se dvodimenzionalni simpleks u vidu **trougla**, za *k=1* je jednomenzionalni simpleks u obliku **duži** i najzad, pod nula-dimenzionim simpleksom podrazumeva se **tačka**.

Skoro redovno se u simpleksnom metodu koriste pravilni simpleksi, koji se definišu kao skup *k+1* tačaka u *k-dimenzionom* prostoru raspoređenih jedna od druge **na istom rastojanju.**




Oblici pravilnih simpleksa do k=3

Vrhovi pravilnog simpleksa čine simpleks-plan sa ***k+1* eksperimenata**. To je plan prvog reda sa minimalnim brojem tačaka.

Izvodi se *k+1* eksperimenata u prvoj seriji i identifikuje se tačka sa **najnepovoljnijim rezultatom**. Ova se tačka isključuje i formira novi iz prethodnog simpleksa tako što mu se, mesto isključene, dodaje nova, njoj **simetrična tačka** u odnosu na suprotnu granu simpleksa.

Centar novog pravilnog simpleksa nalazi se na pravcu koji povezuje isključenu tačku i centar njene grane prethodnog simpleksa. To je istovremeno i **pravac pomeranja simpleks-plana**, koji se, u opštem slučaju, **ne poklapa sa pravcem gradijenta**, ali je upravljen ka višim nivoima efekata i kvaliteta datog procesa.

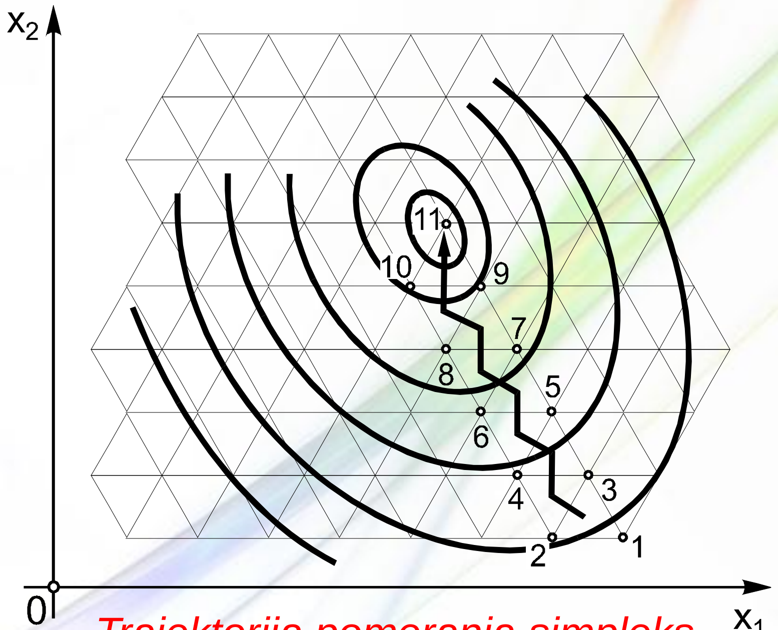
# Simpleksna metoda

Ovakav metod ili pravilo sukcesivnog pomeranja simpleksa iz jednog u drugi položaj odnosno pomeranje u nov, njoj simetričan položaj u odnosu na granu naziva i **metod refleksije.** Refleksijom se, dakle, "pokreću" simpleksi po simpleksnoj trajektoriji **ka traženom optimumu objekta**.

Pored metoda refleksije, simpleksi se sukcesivno "pokreću" ka optimumu objekta i pomoću, još **tri metoda** poznata pod imenom **metod rastezanja**, **metod sabijanja** i **metod redukcije**. U ovim metodama simpleks gubi svojstvo pravilne krute figure i prelazi u tzv. **fleksibilni simpleks**.

Pre formiranja matrice početnog simpleks-plana radi eksperimentalne optimizacije nekog višefaktornog procesa potrebno je da se:

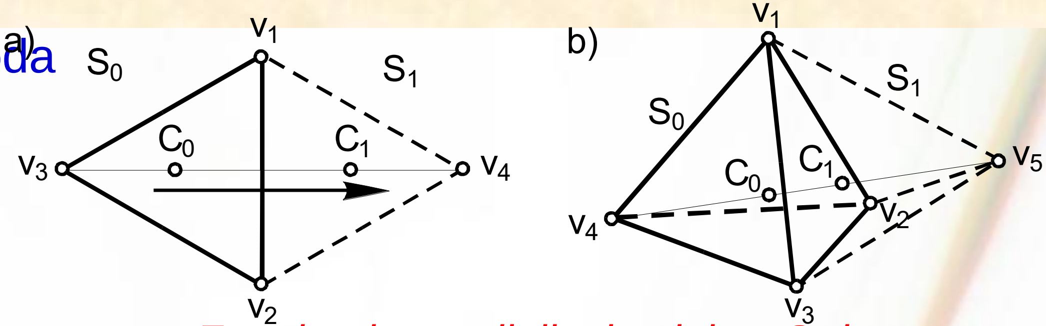
- ***Izvrši selekcija ulaznih faktora*** *procesa, izdvajanjem bitnih faktora,*
- ***Definišu granice eksperimentalne oblasti*** *uzimajući u obzir granične uslove procesa,*
- ***Izaberu koordinate centralne tačke plana****, odnosno vrednosti osnovnih nivoa ulaznih, upravljačkih faktora i*
- ***Utvrdi metrika višefaktornog prostora****, odnosno intervali varijacije ulaznih faktora i kodovi nivoa faktora.*



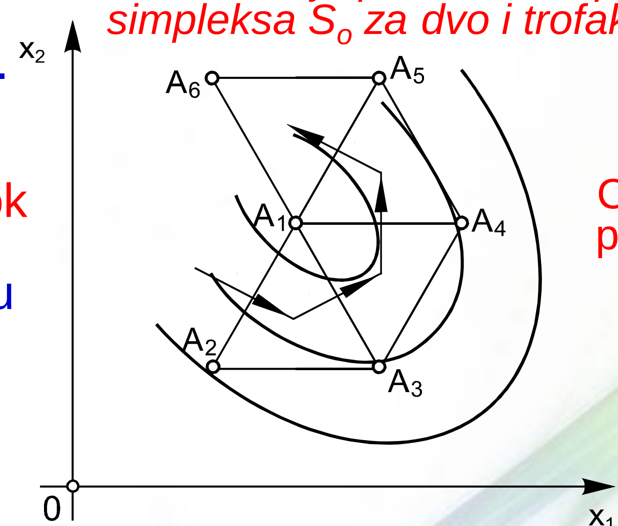

*Trajektorija pomeranja simpleks-planova ka optimumu dvofaktornog procesa*

# Simpleksna metoda

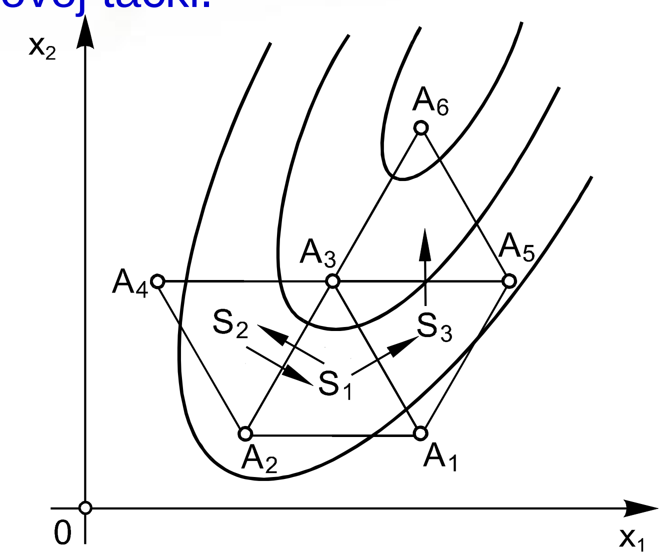
U praktičnoj primeni simpleksnog metoda moguć je jedan specifičan slučaj: **cirkulacija simpleks-planova oko određene tačke**. Cirkulacija se otkriva stalnim prisustvom jedne iste tačke u simpleks-planu i posle *k+1* koraka, tj. posle ukupno *2(k+1)* eksperimenata računajući od njenog ulaska u simpleks. Postoje **dva moguća uzroka cirkulacije**. **Prvi**, tačka se nalazi u užoj okolini optimuma procesa, i **drugi**, u tački je, sa izmerenom vrednošću, superponiran visok pozitivan šum procesa. Oba uzroka se otkrivaju **ponavljanjem eksperimenata** u ovoj tački.




*Formiranje pravilnih simpleksa $S_1$ iz simpleksa $S_o$ za dvo i trofaktorni proces*




Cirkulacija simpleks-planova u optimalnoj oblasti

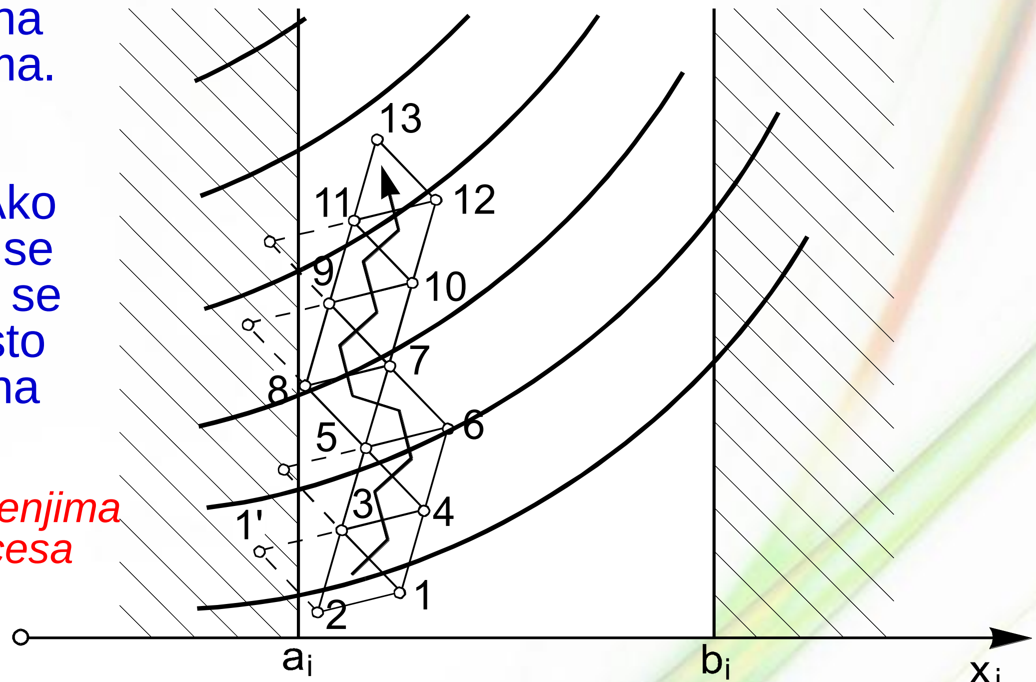



*Slučaj oscilovanja simpleks-plana*

Dogodi li se da izmerena vrednost $y_4$ bude najnepovoljnija u novom simpleksu $S_2$, pri čemu je $y_1$ bilo najnepovoljnije u simpleksu $S_1$, tada nastaje oscilovanje između novog ($S_2$) i prethodnog ($S_1$) simpleksa pa se prekida dalja primena pravila refleksije, a ispitivanje se koncentrše na početni simpleks $S_1$ tako što se iz simpleksa $S_1$ isključuje sledeća nepovoljna vrednost, odnosno vrh $A_2$ i formira novi simpleks $\boldsymbol{S_3}$.

# Simpleksna metoda

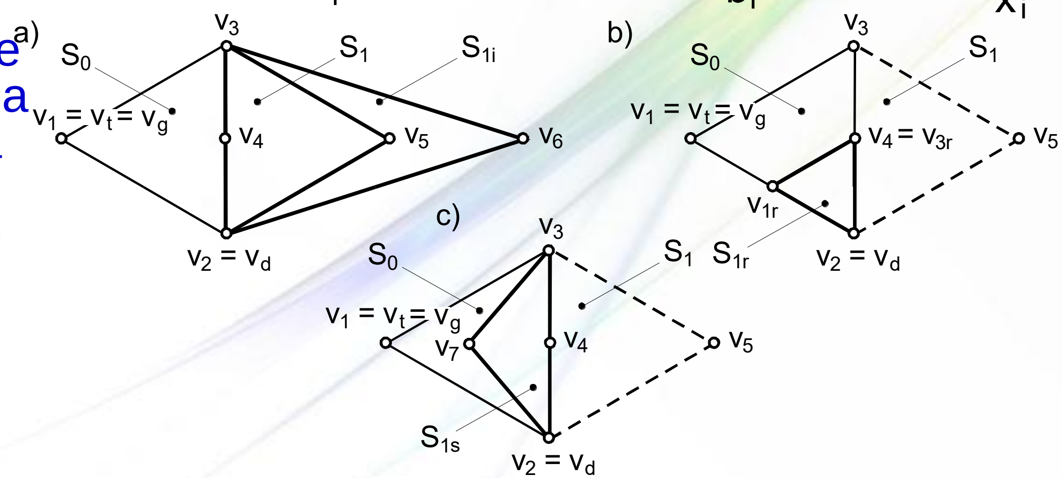
Ograničenja upravljajućih faktora prisutna su skoro redovno u proizvodnim uslovima. Nova tačka novog simpleksa **ne sme pasti u nedozvoljenu oblast** jer bi se time narušio normalan režim procesa. Ako kontrola položaja ove tačke, pokaže da se ona nalazi u nedozvoljenoj oblasti, tada se iz prethodnog simpleksa isključuje (mesto najnepovoljnije tačke naredna nepovoljna tačka.




*Simpleks metod sa ograničenjima upravljajućih faktora procesa*

***Oblici fleksibilnih simpleksa***

Mane pravilnog simpleksa otklanjaju se ili se ublažavaju do tolerantnog stepena razvojem simpleksnih procedura ali na bazi **fleksibilnog simpleksa**. Ako se pravilni simpleks učini fleksibilnim, kao na primer elastičnom mnogogranom figurom, koji se po volji može istezati i sabijati, tada se postiže bolje prilagođavanje simpleks-planova topologiji date funkcije optimizacije $F_c$.




*Ilustracija rastezanja (a), redukcije (b) i sabijanja (c) dvodimenzionog simpleksa*

# Regresiona metoda

Primenom regresione metode postižu se, u nauci i tehnici, važni ciljevi:

- *Postavljanje matematičkog modela*, odnosno **jednačine višestruke regresije** za raznovrsne objekte sa **analizom adekvantnosti modela i signifikantnosti pojedinih faktora**, odnosno promenljivih veličina, u modelu. Pri tome se modeli odnose, kako na modele karakteristika, tako i na funkcije optimizacije $F_c$ objekta.
- *Proučavanje mehanizama* nastanka pojava i dejstava u datom objektu
- *Otkrivanje veza* među pojavama i utvrđivanje oblika, karaktera i stepena veza između ovih pojava, na primer, analiza karaktera i stepena uticaja pojedinih faktora na posmatrane karakteristike, nekog objekta na osnovu matematičkog modela tog objekta.

*Definisanje optimalnog vektora* $\vec{x}_o = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{k0})$

pri čemu se postiže optimalna vrednost posmatrane karakteristike $y=y_o$ ili funkcije optimizacije $F_c=F_{co}$ nekog objekta.

U vezi sa prvim ciljem treba znati da **matematički model**, odnosno stohastički model ili višestruka regresija, nekog višefaktornog objekta mora da sadrži **dve osnovne komponente**:

1. ***Funkciju srednjih vrednosti*** $\hat{y} = E(y)$ ili geometrijsko mesto centara grupisanja frekvencija u posmatranom višefaktornom prostoru i
2. ***Intervale pouzdanosti*** $IP_y$ oko pojedinih centara grupisanja, odnosno oko regresione krive, unutar kojih se, sa verovatnoćom $P_{gs}$, raspoređuju vrednosti karakteristike odnosno frekvencije $y$

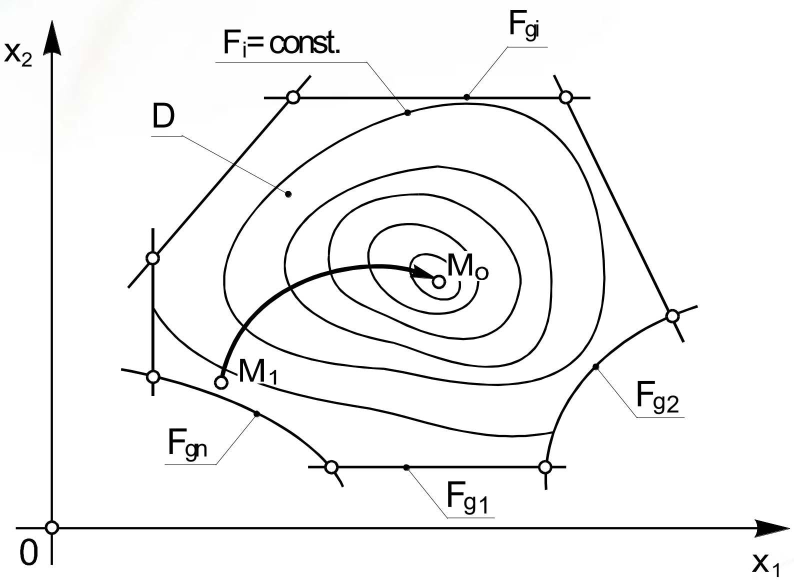
**Postavljanjem konkretnog oblika višestruke regresije ili funkcije cilja** za dati objekat optimizacije, **završava se prva etapa** u proceduri regresionog metoda.

# Regresiona metoda

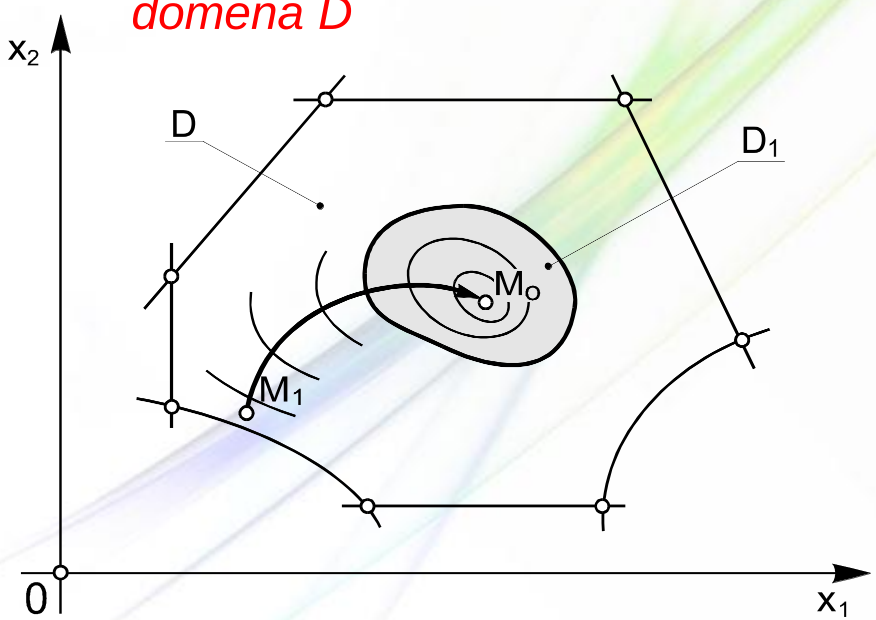
**U drugoj etapi** se definiše **traženi optimum datog objekta optimizacije** primenom nakog od analitičkih metoda na višestruku regresiju, dobijenu u prvoj etapi. Ovo je moguće jer se statistički model, odnosno višestruka regresija, datog objekta može, kao i svaki dati matematički model, optimizirati analitičkim metodama.Iz ovog sledi da **regresiona metoda predstavlja**, u suštini, **kombinaciju eksperimenata**, odnosno **empirijske optimizacije i analitičke optimizacije**, dakle, kombinovanu eksperimentalno-analitičku metodu optimizacije objekta.

Primenjen na optimizaciju objekta, suština regresione metode iskazuje se kroz **dve opšte procedure**:

1. Modeliranje datog objekta u celokupnom dopuštenom domenu D




2. *Modeliranje objekta u užoj oblasti $D_1$ optimuma $M_o$ unutar dopuštenog domena D*



# Regresiona metoda

**Prva metodologija** se odlikuje time da se modelira, tj. postavlja **jedinstveni model objekta** za celokupni obuhvaćeni domen *D*, dakle, jedan model datog objekta koji važi za sve tačke dopuštenog višefaktornog prostora (veći broj eksperimenata, model je složeniji).

**Druga metodologija** je razvijena za minimalan broj eksperimenata**.** Procedura je podeljena u **dve etape.**

**U prvoj etapi** procedure primenjuje se neka od eksperimentalnih metoda sa iterativnim, višekoračnim algoritmom, na primer, **Boks-Vilsonova** ili **simpleksna metoda**. Izabrani algoritam se sledi, tj. minimalna serija eksperimenata se izvodi, na trajektoriji gradijentnoj ili simpleksnoj, **sve do ulaska u uže područje** traženog optimuma datog objekta kada se i završava prva etapa procedure.

**Druga etapa** procedure obuhvata modeliranje identifikovane uže optimalne oblasti, uže oblasti oko optimuma, primenom **planova za matematičko modeliranje objekta**. Ovde se koriste višefaktorni planovi višeg reda-centralni kompozicioni plan koji omogućava da se sa relativno malim brojem eksperimenata modelira uža oblast optimuma datog objekta.

***Osnovne jednačine metode***

- *Jednačine ocene signifikantnosti parametara modela,*
- *Jednačine kriterijuma za ocenu adekvatnosti modela i*
- *Jednačine granica pouzdanosti modela.*